

单摆的基础实验

单摆是由一摆线 l 连着重量为 mg 的摆锤所组成的力学系统，是力学基础教科书中都要讨论的一个力学模型。当年伽利略在观察比萨教堂中的吊灯摆动时发现，摆长一定的摆，其摆动‘周期不因摆角而变化，因此可用它来计时，后来惠更斯利用了伽利略的这个观察结果，发明了摆钟。如今进行的单摆实验，是要进一步精确地研究该力学系统所包含的力学线性和非线性运动行为。

一 实验目的

- 1、学会使用计时器和米尺，测准摆的周期和摆长。
- 2、验证摆长与周期的关系，掌握使用单摆测量当地重力加速度的方法。
- 3、初步了解误差的传递和合成。

二 仪器与用具

单摆实验装置，计时器，米尺。

三 实验原理

1 利用单摆测量当地的重力加速度值 g

用一不可伸长的轻线悬挂一小球，作幅角 θ 很小的摆动就是一单摆。如图 1 所示。

设小球的质量为 m ，其质心到摆的支点 O 的距离为 l （摆长）。作用在小球上的切向力的大小为 $mg\sin\theta$ ，它总指向平衡点 O' 。当 θ 角很小，则 $\sin\theta \approx \theta$ ，切向力的大小为 $mg\theta$ ，按牛顿第二定律，质点的运动方程为

$$ma_{\text{切}} = -mg\sin\theta, \quad \text{即} \quad ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta,$$

因为 $\sin\theta \approx \theta$ ，所以

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta, \quad (1)$$

这是一简谐运动方程(参阅普通物理学中的简谐振动)，(1)式的解为

$$\theta(t) = P\cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (3)$$

式中， P 为振幅， ϕ 为幅角， ω_0 为角频率（固有频率）， T 为周

期。可见，单摆在摆角很小，不计阻力时的摆动为简谐振动，简谐振动是一切线性振动系统的共同特性，它们都以自己的固有频率作正弦振动，与此同类的系统有：线性弹簧上的振子，LC 振荡回路中的电流，微波与光

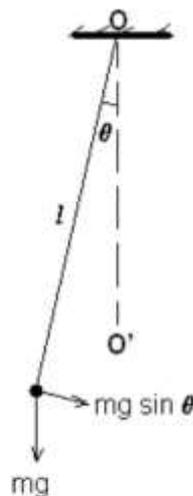


图1 单摆示意图

学谐振腔中的电磁场，电子围绕原子核的运动等，因此单摆的线性振动，是具有代表性的。由（3）式可知该简谐振动固有角频率 ω_0 的平方等于 g/l ，由此得出

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}, \quad (4)$$

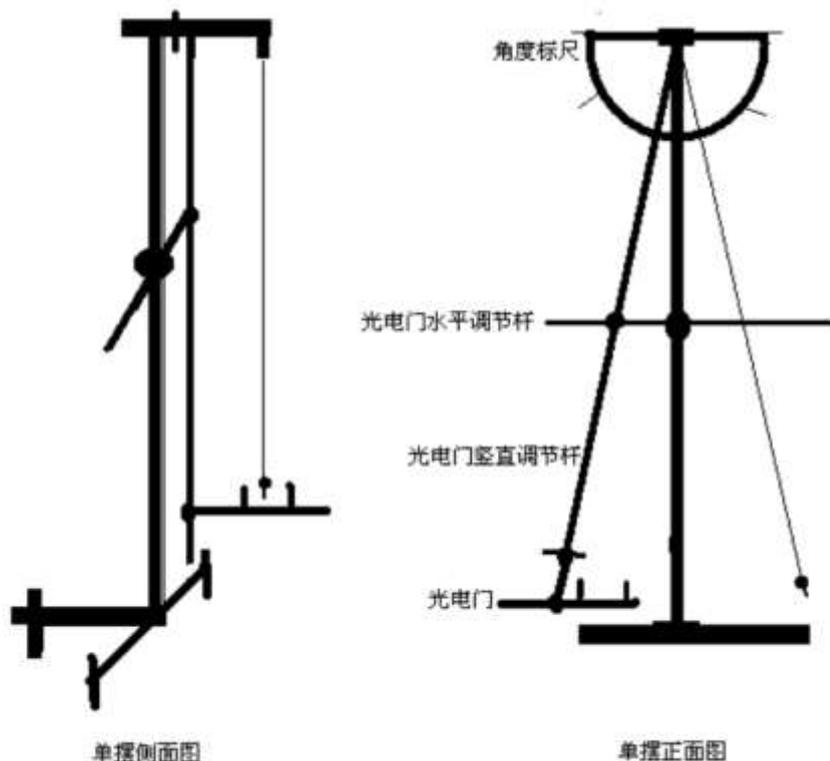


图 2 单摆结构示意图

由（4）式可知，周期只与摆长有关。实验时，测量一个周期的相对误差较大，一般是测量连续摆动 n 个周期的时间 t ，由（4）式得

$$g = 4\pi^2 \frac{n^2 l}{t^2}, \quad (5)$$

式中 π 和 n 不考虑误差，因此（5）式的误差传递公式为

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta t}{t}, \quad (6)$$

从上式可以看出，在 Δl 、 Δt 大体一定的情况下，增大 l 和 t 对测量 g 有利。

四 实验内容

- 1、分别用米尺和游标卡尺，测量摆线长和摆球的半径。摆长 l 等于摆线长加摆球的半径。

- 2、当摆球的振幅小于摆长的 $\frac{1}{12}$ 时，摆角 $\theta < 5^\circ$ 。
- 3、如果用停表测量周期，当摆锤过平衡位置 O' 时，按表计时，握停表的手和小球同步运动，为了防止数错 n 值，应在计时开始时数“零”，以后每过一个周期，数 1, 2, ..., n 。以减少测量周期的误差。
- 4、如果用计时器测量周期，参见附录 2 有关计时器的使用。
- 5、重力加速度 g 的测量

实验方案一：

改变单摆的摆长 l ，测量在 $\theta < 5^\circ$ 的情况下，连续摆动 n 次的时间 t ，填入表 1 中。

表 1: 改变摆长 l ，在 $\theta < 5^\circ$ 的情况下，连续摆动 20 次时间 t 的测量结果

摆长 l (cm)	60.00	70.00	80.00	90.00	100.00	110.00
周期 T_{20} (s)						
周期 T_{20} (s)						
周期 T_{20} (s)						
周期 T (s)						
T^2						

表 1 的测量数据，有二种处理方法：

(1) 作图法：根据表 1 的数据，作 $l - T^2$ 直线，在直线上取二点 A 和 B，求直线斜

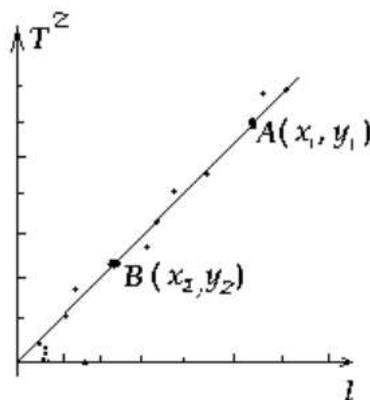
率 $K = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ，由 (4) 式知

$$g = \frac{4\pi^2}{K}$$

(7)

根据 (7) 式求重力加速度 g 。

(2) 计算法：根据表 1 的数据，分别计算，不同摆长的重力加速度 $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ ，然后取平均，再计算不确定度。



实验方案二：

不改变单摆的摆长 l ，测量在 $\theta < 5^\circ$ 的情况下，连续摆动 n 次的时间 t 。参考“六 测量举例”处理实验数据。

6 测量同一摆长不同摆角下的周期 T ，比较摆角对 T 的影响。

表 2 摆角对周期 T 的影响

摆角 θ	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
-------------	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

(度)																	
周期 T (s)																	

五 回答问题

1、设单摆摆角 θ 接近 0° 时的周期为 T_0 ，任意摆角 θ 时周期 T ，二周期之间的关系近似为

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

若在 $\theta = 10^\circ$ 条件下测得 T 值，将给 g 值引入多大的相对误差？

2、有一摆长很长的单摆，不许直接去测量摆长，你设法用测时间的工具测出摆长？

山东大学普通物理实验