绪论、实验的误差
及数据处理基础知识

山东大学物理实验教学中心

普通物理实验室

一、 物理实验课程的地位、作用、任务和内容

- **地位**：<u>独立的必修基础课程</u>（与理论课教学具有同等重要的地位，但也是其他任何课程无法替代的！）

- **作用**：对理工科大学生系统地进行物理实验方法、实验技能技巧、科学研究基本能力训练（<u>**的唯一课程**</u>）。为后续课程的学习和今后的工作奠定必要和良好的基础。

- **任务**：

1. 学习物理实验基础知识。
2. 培养和提高学生的科学实验能力。
3. 培养与提高学生的科学实验素养。

能够较好承担这些工作所需要的基本知识、基本能力和基本素质

内容：

1. 学习物理实验基础知识。

① 测量、误差的基本知识

② 误差分类及消减、估算方法

③ 有效数字定义及运算规则

④ 数据处理基本方法

本堂课讲授，课中练习

2. 培养和提高学生的科学实验能力。

① 选择合理实验方法和仪器的能力

② 基本实验技能和技巧

③ 自我分析问题、解决问题和排除简单故障的能力

④ 基本的实验方法创新和设计实验能力

•课中练习。特别注意基本知识与能力的掌握。

3. 培养与提高学生的科学实验素养。

① 严谨、实事求是、规范行事的作风

② 独立、创新、不断探索的意识

•这两点是我们与欧美先进国家学生的主要差距。

二、《大学物理实验》的上课方式、要求

“大学物理实验”课程包括的三个阶段（环节）

1. 实验前的预习

- 阅读实验教材及相关资料，理解实验原理；
- 了解仪器的工作原理和用法；
- 切记注意事项及安全操作规程；
- 回答或提出问题；
- 对于设计实验，要设计出实验方案。
- 要写好预习报告，否则不准做实验。

预习报告的内容为：

(1)目的要求：　说明所做实验的目的和学习要求。

(2)实验原理概述：　（应画出所需的原理图。）

(3)实验仪器：(应对其结构、原理及性能有初步的了解)。

重点

(4)实验步骤：　写出本实验的实验内容、操作步骤（关键是提出问题和注意事项）。

(5)数据表格：　设计好记录各项实验数据的表格，并自己推导处理数据所需的公式。

2. 课堂实验

- 课堂实验是实验课的最重要的环节：

(1) 检查仪器、材料是否完好、齐备；安装仪器系统、检查确保无误；

(2)按步骤进行实验操作 (必要时可以和老师讨论

详见讲义

(3) 观测、记录数据、处理数据（实事求是、保留原始数据）

(4) 对测试结果进行分析，提出改进措施，重复试验。

(5)将所测得的数据和处理结果交给教师检查。并与老师讨论（或回答老师的问题）；

(6)经教师认可、签字后，整理仪器，保持整洁，保证不留任何事故隐患，然后才能离开实验室。

3. 实验报告（研究报告、论文）

- 实验报告要用统一报告纸书写，必须各自独立地及时完成。与预习报告的具体内容有所不同,通常包括

重点

(1) 实验名称、实验者姓名、同组者姓名、实验日期。

(2) 实验目的。

(3) 实验原理。

比预习报告要更详尽一些（但不要照抄教材）。

(4) 实验方法或步骤。

与预习报告有所不同，**应当写实际操作的情况**。

(5) 数据记录及其说明。

实验数据的记录应尽量详尽，并注明单位。数据记录还应包括有关的常数。

(6) 数据处理及实验结果。

含有计算、实验曲线、表格、误差分析、最后结果等内容。

(7) 实验讨论。

4. 成绩考核

- 课程内容：
  - 做N个实验（N为7次左右，每个实验满分100分），
  - 另交一次实验报告、一次论文或报告。
- 课程成绩评定方法为：

【N次实验成绩+1次实验报告成绩+1次课程评价成绩/（N+2）

即：

$$课程成绩=\frac{N\times 100+100+100}{N+2}$$

成绩排序后，评出优、良、中、及、不及格。

三、如何学好“大学物理实验”课程

把每一个实验当做一个研究课题来做

1. **每位同学准备一个记录本（真正的本子）：**
   - 写预习报告、问题，实验时记录实验数据、数据处理过程、结论和问题讨论等。（实验记录本应能长期保存）
2. **认真做好实验课程的三个环节：**
   - 按要求做、注重细节、注意规范，把实验做精；
   - 注意主动、多动手、多动脑、多讨论。

国外学校实验课的情况：

实验记录

实验操作评价表

学生的实验报告

每个实验的成绩评定：

- 每个实验的成绩满分为100分，一般分为三部分：（**包含实验的三个部分**）

  1. 操作（30-40分，包括预习情况）
  2. 数据记录及处理（30-50分）
  3. 讨论（20-30分）或实验报告

注意：一般能够完成教材中的内容可获得80%左右的分数，剩余20%需有自己扩充的内容，如能发现实验中的问题、对实验提出改进的方法、有深入的分析讨论等

3. 实验课中注意：

- **注重培养：**
  - 独立分析问题、解决问题的能力
  - 全面、系统考虑和解决问题的能力
  - 测量可信程度的分析和评估能力
  - 实验数据有效记录、处理和合理表达能力
  - 实验整体科学描述的能力
  - 相互协调的能力
- **强调理解和必须做到：**
  - 要尽量准确地测量
  - 要客观、完整记录和表达
  - 要对每个实验测量的可信度（误差）进行评估

学好实验课的应做到

- 三勤：

  勤动手——多尝试

  勤动脑——多思考

  勤动嘴——多讨论

  三要：

  要遵守规范、严格要求

  要实事求是、客观完整

  要勇于创新、协调互助

4. 学生实验制度（详见实验室、教材）

1. 请假必须有盖章的假条，否则按旷课论处。请假两次及以上必需补做。无故旷课，不补。

2. 迟到超过15分钟、实验后未经任课教师检查签字而离开者，均按旷课论处。旷课则本次实验按零分计。学期平时实验成绩达三分之一及以上不及格者，最后成绩不及格。

3. 预习报告和测量原始数据都应写在专用的物理实验记录本上，否则任课教师不予签字并酌情减扣实验成绩。

4. 实验小组按学号顺序（从小到大）分，且在整个学期中不得更换。每组必须在相应编号的仪器上做实验，未经教师同意不得更换仪器。

学生实验制度（续）

5. 实验报告（论文）上要写上同组者姓名。**实验报告（论文）不得抄袭。雷同报告均判为零分。**
6. 注意保护仪器。**丢失或损坏仪器，按学校有关规定赔偿。**
7. 实验结束后，把使用的仪器整理好，关闭有关的电源。**值日生要打扫实验室。**

课后要详细阅读“学生实验制度”，且认真遵守！

上课时间、地点

1、上课时间：见课表；

2、上课地点：兴隆山校区综合实验楼七层。

3、分组：如10个实验、十个实验组：

实验：①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨　⑩

课表、分组点名册

单周 星期五				
控卓越 18.1-.2 人工智能 18,生医 18 自动 18.2 自科 18 (166 人, 10 组)				
一	二	三	四	五
六	七	八		
十一	十二			

一、液体黏度系数 12	二、表面张力 11	三、测定金属丝杨氏模量 6	四、热敏电阻温度系数 9	五、光纤位移传感器 5	六、 CCD 测径 1
723		734		728	
七、密立根油滴 2	八、声速测量 2	九、单摆 7	十、巨磁阻 7	十一、导体电阻率 3	十二、刚体转动 4
724、719		722		725	
十三、单色仪定标 10	十四、衍射光栅波长 10				
733					

第一章

实验的误差
及数据处理基础知识

误
差
理
论
基
础

物理实验大体分为下面几个步骤：

a. 要明确实验目的、内容、步骤，通过实验过程观察某些物理现象，测量某些物理量-------**观察和测量**；

b. 测试计量是取得正确实验结果的关键一步，对测量量----**准确记录计量结果**；

c. 任何测量都有误差，应运用误差理论估计判断测量结果是否可靠------对**计量结果误差分析和计算**；

d. 实验目的是为了从测得的大量数据中得到实验规律，寻找各变量间的相互关系-------**数据处理**；

e. 最后写出测量结果------**结果表达**。

本章介绍（b）-（e）所涉及的理论和方法

误
差
理
论
基
础

主要内容：

§ **1.1** 测量、误差的基本知识

§ **1.2** 不确定度的基本概念

§ **1.3** 测量结果随机误差的估算

§ **1.4** 有效数字及其运算规则

§ **1.5** 实验数据处理的一般方法

§ **1.6** 系统误差的处理

§1.1 测量、误差的基本知识

一、测量与误差

1.1 测量

- 测量就是将待测量与选做标准单位的物理量进行比较，得到此物理量的测量值。
- 测量值必须包括:数值和单位，如测量课桌的长度为1.2534m。

误差理论基础

测量的分类：

按测量方式通常可分为：

直接测量——由仪器直接读出测量结果的叫做直接测量

如：用米尺测量课桌的长度，电压表测量电压等

间接测量——由直接测量结果经过公式计算才能得出结果的叫做间接测量.

如：测量单摆的振动周期T，用公式

等精度测量——如对某一物理量进行多次重复测量，而且每次测量的条件都相同(同一测量者，同一组仪器，同一种实验方法，温度和湿度等环境也相同)，把这样进行的重复测量称为等精度测量。

不等精度测量——在诸测量条件中，只要有一个发生了变化，这时所进行的测量，就称为不等精度测量。

"等精度测量"是用统计规律进行误差计算的前提！

误
差
理
论
基
础

1.2 误差

由于测量方法、测量环境、测量仪器和测量者的局限性---误差的不可避免性，所以测量结果也应包含测量误差的说明及其优劣的评价

误差定义：测量值x，真值（客观实在值）为a，则测量误差为：

$\delta = x - a$ （不可知的）

真值就是与给定的特定量的定义相一致的量值。客观存在的、但不可测得的（测量的不完善造成）。

可知的真值：

a. 理论真值----理论设计值、理论公式表达值等
如三角形内角和180度；

b. 约定(实用)真值-----指定值，最佳值等，
如阿伏加德罗常数，算术平均值当真值等。

二、误差分类

误差理论基础

按其性质和原因可分为系统误差、随机误差和粗大误差三类

1．系统误差：在重复测量条件下对同一被测量进行无限多次测量结果的平均值减去真值 → $\bar{x}(n \to \infty) - a$

来源：

仪器、装置误差；

标准器误差；仪器安装调整不妥，不水平、不垂直、偏心、零点不准等，如天平不等臂，分光计读数装置的偏心；附件如导线

测量环境误差；

温度、湿度、光照，电磁场等

测量理论或方法误差；

理论公式为近似或实验条件达不到理论公式所规定的要求

人员误差------生理或心理特点所造成的误差

特点：同一被测量多次测量中，保持恒定或以可预知的方式变化（一经查明就应设法消除其影响）

误差理论基础

分类：

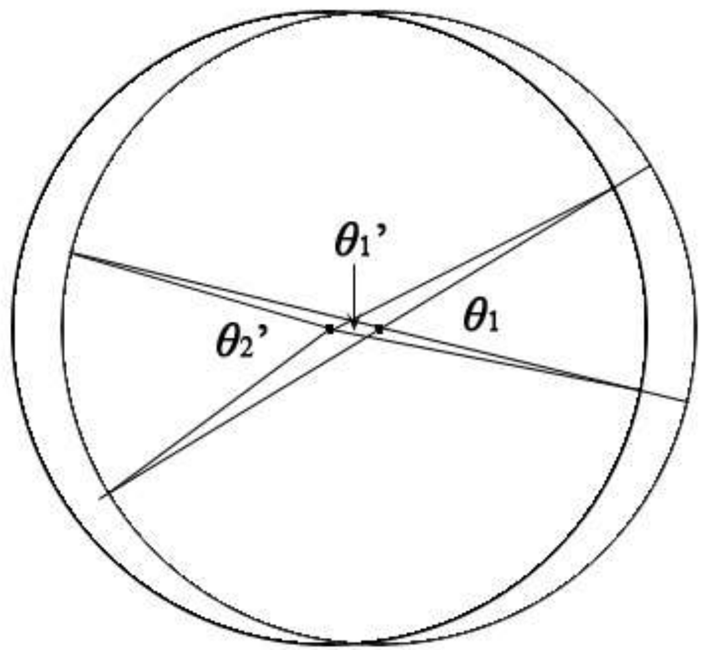
a. 定值系统误差------其大小和符号恒定不变。

例如，千分尺没有零点修正，天平砝码的标称值不准确等。

b. 变值系统误差----呈现

位置变化。例如分光计

心不重合，存在偏心差



发现的方法

(1)数据分析法--- 观察

(2)理论分析法--- 理论

误差理论基础

(3)对比法

a. 实验方法

单摆g=(9.800±0.002)m/s^2;

自由落体g=(9. 77±0.02)m/s^2，其一存在系统误差

b. 仪器

如两个电表接人同一电路，对比两个表的读数，如其一是标准表，可得另一表的修正值。

c. 改变测量条件

某些物理量的方向、参数的数值、甚至换人等

处理：任何实验仪器、理论模型、实验条件，都不可能理想

a. **消除产生系统误差的根源(原因)**

b. **选择适当的测量方法**

误差理论基础

1) 交换 差

2) 替代

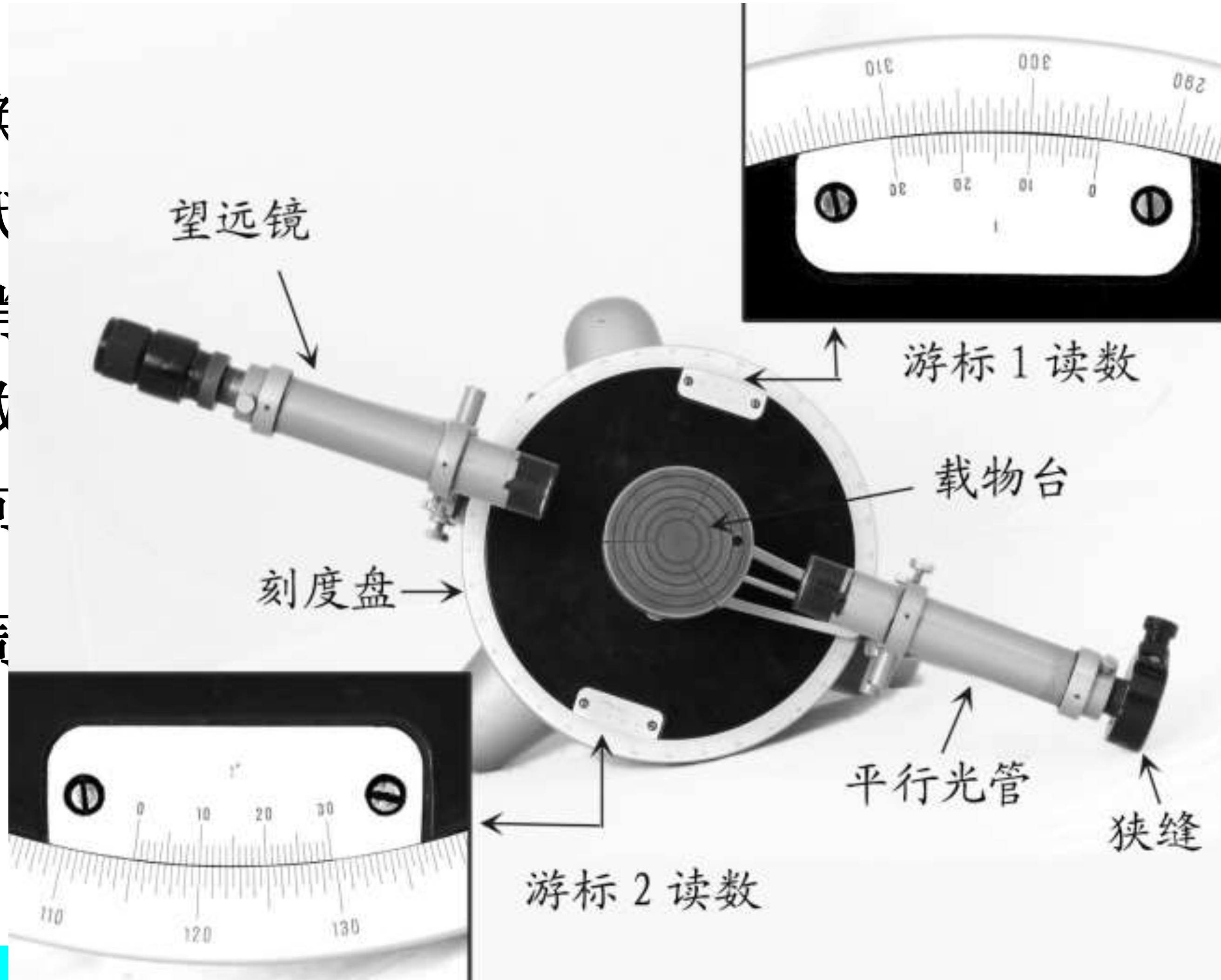
3) 抵消 时

读数 的

方向

1) 半周 、游

标，



各种

图中角度读数为：游标1读数：295°+132’=295°13′

游标2读数：115°+12’=115°12′

分光计 读数方法示意图

误差理论基础

2. 随机误差：测量结果减去同一条件下对被测量进行无限多次测量

结果的平均值 → $x_i - \bar{x}(n \to \infty)$

来源：测量过程中一些随机的未能控制的可变因素或不确定的因素；被测对象本身的不稳定性引起的。

特点：个体而言是不确定的；但其总体服从一定的统计规律。

处理：可以用统计方法估算其对测量结果的影响（标准差），不可修正，但可减小之。（下面讲）

误差理论基础

3．粗大误差 ：明显超出规定条件下预期的误差

来源：使用仪器的方法不正确，粗心大意读错、记错、算错数据、或实验条件突变等原因造成的（坏值）。

处理：实验测量中要尽力避免过失错误；
在数据处理中要尽量剔除坏值。

实验中的异常值决不能不加分析地统统扔掉

------很多惊世发现都是超出预期的结果！！！

误差理论基础

精确度：用于表述测量结果的好坏的名词

1. 精密度：表示测量结果中随机误差大小的程度。

即是指在规定条件下对被测量进行多次测量时，所得结果之间符合的程度，简称为精度。 $x_i - \bar{x}$

2. 正确度：表示测量结果中系统误差大小的程度。

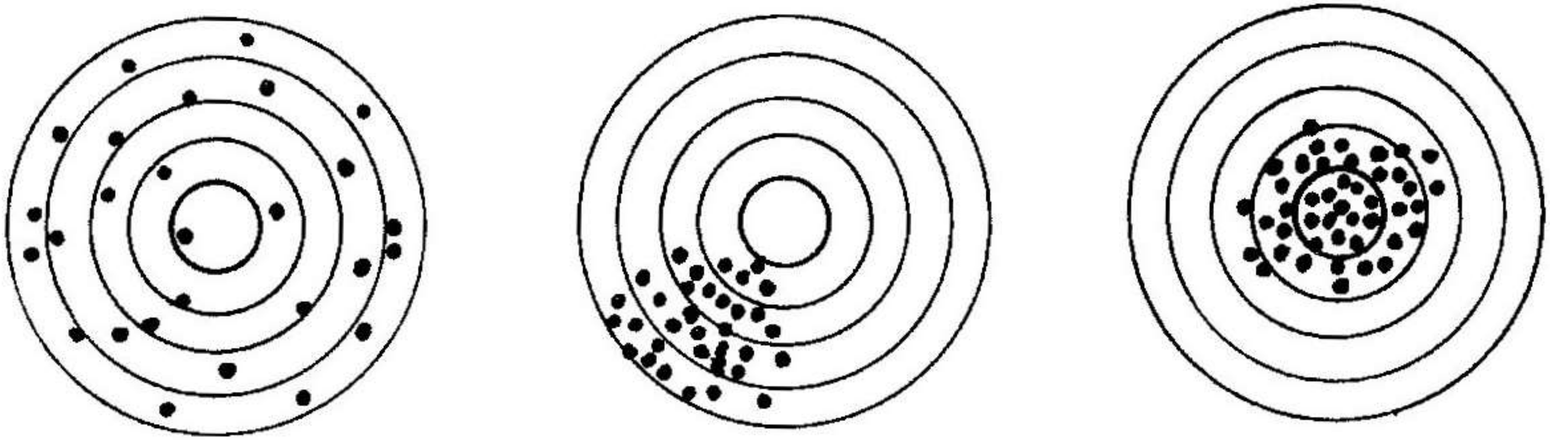
它反映了在规定条件下，测量结果中所有系统误差的综合。 $\bar{x} - a$

3. 准确度：表示测量结果与被测量的“真值”之间的一致程度。

它反映了测量结果中系统误差与随机误差的综合。称精确度。

$$x_i - a = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)$$

正确理解“精密度、正确度、准确度”意义



(a)　　(b)　　(c)

a) 正确度高,
精密度低

a) 仪器误差小,
随机误差大

不好的测量

(b) 精密度高,
正确度低

(b) 仪器误差大
随机误差小

不好的测量

(c) 精密度、
正确度和准确度
皆高

(c) 仪器误差、随机
误差都小

好的测量

误差理论基础

误差的表示形式：

a. 绝对误差：理论定义 $\delta = x - a$ ---→ 不可得

通常取多次重复测量的算术平均值作为最佳（真）值

残差（实用） $v_i = x_i - \bar{x}$

b. 相对误差: 理论定义 $E = \dfrac{\delta}{a} \times 100\%$ ---→ 不可得

实用 $E = \dfrac{v_i}{\bar{x}} \times 100\% = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}} \times 100\%$

测量结果的优劣，在不同测量比较时，要用相对误差表示。例如，测量10m长相差1mm与测量1m长相差1mm，两者绝对误差相同，而相对误差不同。

误差理论基础

三、随机误差的分布规律与特性

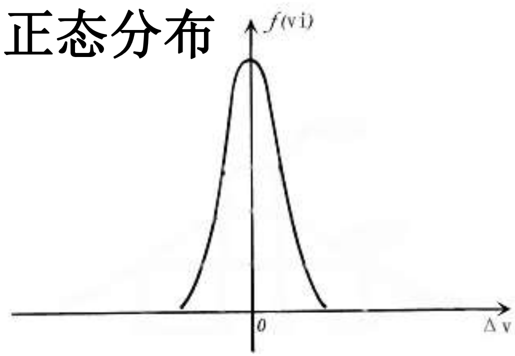
分布规律的估计—经验分布曲线 [$f(v_i)$---v_i]

测量列 x_i， n容量　　$v_i = x_i - \bar{x}$　　$f(v_i)$---v_i出现的概率

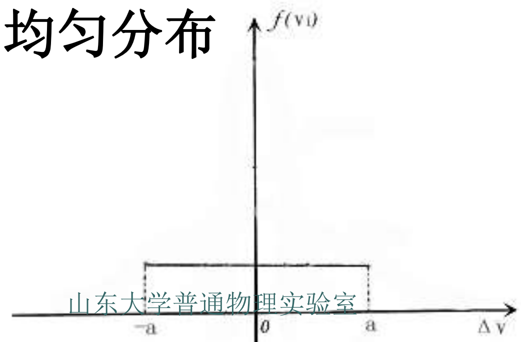
δ_i (单位)	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2
出现次数	10	20	40	20	10
$f(\delta_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

对大量数据处理时，往往对v_i取一个单位Δv(尽量小)，考虑v_i落在第一个Δv，第二个Δv，第三个Δv --的$f(v_i)$，--〉经验分布曲线

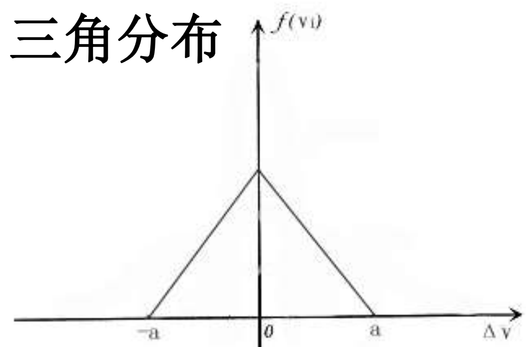
正态分布



均匀分布



三角分布



正态分布规律:

大多数随机误差服从正态分布(高斯分布)规律

误差理论基础

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

特点:

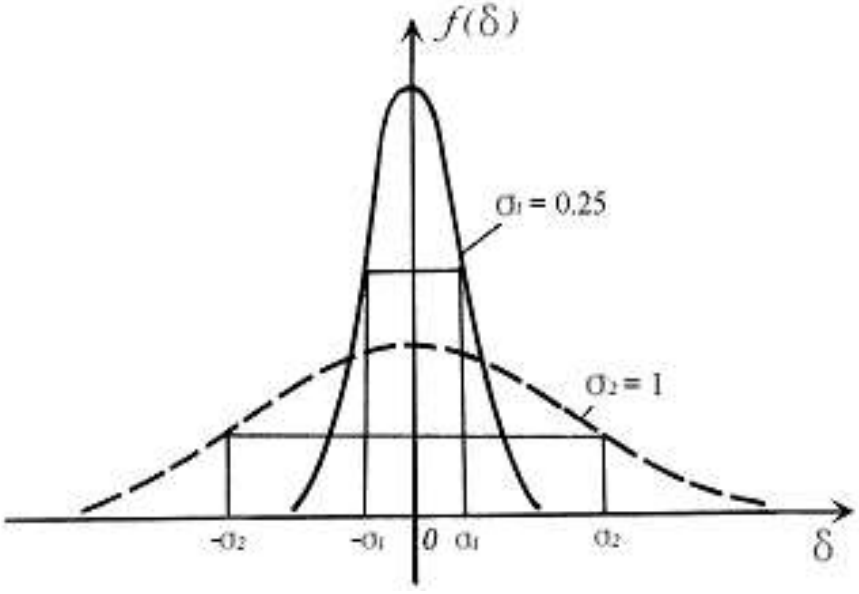
1）有界性.

2）单峰性.

3）对称性.

4）抵偿性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i=0$$



可以通过多次测量，利用其统计规律达到互相抵偿随机误差，找到真值的最佳近似值(又叫最佳估计值或最近真值)。

不
确
定
度
的
基
本
概
念

§1.2 不确定度的基本概念

1. 不确定度的概念

- 不确定度是表征测量结果具有分散性的一个参数，它是被测物理量的真值在某个量值范围内的一个评定。

- 详见教材和其他资料

§1.3 测量结果随机误差的估算

随机误差计算

1. 直接测量中随机误差的估算

(1)多次测量的算术平均值

在相同条件下对一物理量进行了n次独立的直接测量，所得n个测量值为x_1，x_2，…，x_n，称其为测量列，

算术平均值 $$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \to a \qquad (n\to\infty)$$

根据误差的定义，误差应是测量值与真值之差。但由于实际实验中真值一般不可知，因此通常用测量的算数平均值代替真值，这样**测量值与算数平均值之差称为残差**。在以后的叙述中，一般误差的计算都用残差，但仍用误差一词。

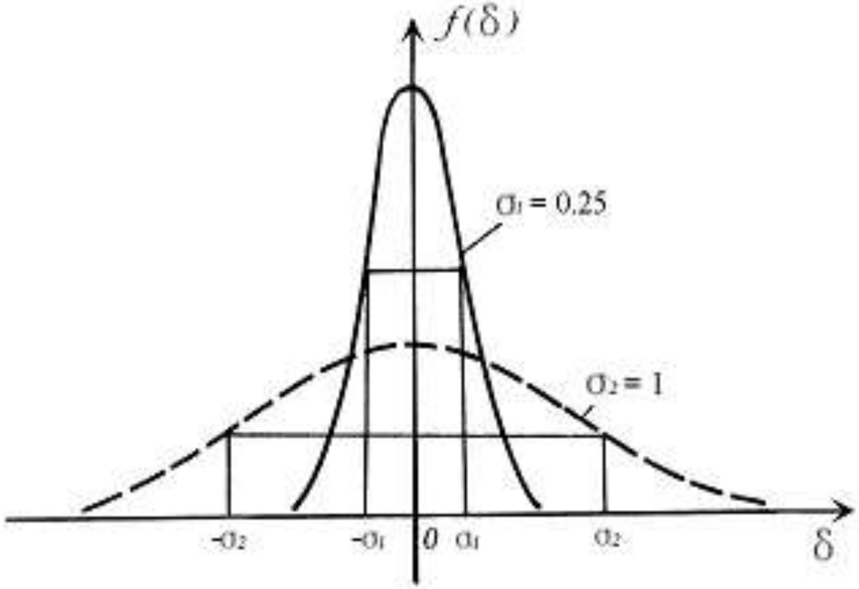
随机误差计算

(2) 多次测量结果的随机误差(标准误差)

测量列的标准误差σ_x

标准差 $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i$

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ (



随机误差的分散性，任一测量结果的误差落在[-σ_x，σ_x] 范围内的概率为68.3%。

随机误差计算

算数平均值的标准误差：

$$平均值的标准差 \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$\sigma_{\bar{x}}$的意义与σ $_x$的意义相似，它表示测量量的算数平均值与真值的误差落在[-$\sigma_{\bar{x}}$,$\sigma_{\bar{x}}$]范围内的概率为68.3%。显然 $\sigma_{\bar{x}}$<σ $_x$, 所以测量量的算数平均值比测量列中任一个测量值都更可靠。

随着测量次数**n**的增加，测量结果的误差越小。通常取 5≤***n***≤10

随机误差计算

（3）单次测量结果标准差的估算：

$$\sigma = \frac{\Delta_m}{k}$$

Δ_m为仪器的最大读数误差, 通常取仪器的最小分度值。

k为分布系数，符合正态分布，则 **k=3**；符合平均分布时，**k=√3**

(4)测量结果的表示:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} & \text{(单位)} \\ E = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} & (100\%) \end{cases}$$

意义:真值x_0落在$x\pm\sigma_{\bar{x}}$的范围内的概率为68.3%。

随机误差计算

例1 用温度计对某个不变温度等精度测量数据如表，求测量结果。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t (°C)	528	531	529	527	531	533	529	530	532	530	531

解:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$ =530.0909 °C =530.

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} & (单位) \\ E = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} & (100\%) \end{cases}$$

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}$$ =0.5301 °C =0.6 °C

$$E = \frac{\sigma_{\bar{t}}}{\bar{t}} \times 100\% = \frac{0.5301}{530.0909} \times 100\%$$ =0.1000017% =0.11%

$$\begin{cases} t = 530.1 \pm 0.6 & ({}^{o}C) \\ E = 0.11 & (\%) \end{cases}$$

随机误差计算

2. 间接测量结果标准误差及其表示——标准误差的传递与合成

设间接测量$N=f$（x，y，z…），直接测量量的标准误差为σ_x、σ_y、σ_z …, 则：

测量值：

$$\overline{N}=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\cdots)$$

标准误差：

$$\sigma_{\overline{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2\sigma_{\bar{x}}^2+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2\sigma_{\bar{y}}^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\sigma_{\bar{z}}^2+\cdots}$$

其中$\sigma_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

随机误差计算

相对误差：

$$E=\frac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\overline{N}}\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}^2}{\overline{N}}\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}^2}{\overline{N}}\right)^2+\cdots}$$

测量结果的表示

$$\begin{cases} N=\overline{N}\pm\sigma_{\overline{N}} \qquad (\text{单位}) \\ E=\dfrac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}\times 100\% \end{cases}$$

计算顺序：

计算公式以加减运算为主，先算标准误差，再算相对误差；

计算公式以乘除或乘方运算为主，先算相对误差，再算绝对误差

随机误差计算

例 $$N=\frac{x^2(y-z)}{q^3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2x(y-z)}{q^3}$$

$$E_N=\sqrt{(\frac{\partial N}{\partial x})^2(\frac{\sigma_x}{N})^2+(\frac{\partial N}{\partial (y-z)})^2(\frac{\sigma_{y-z}}{N})^2+(\frac{\partial N}{\partial q})^2(\frac{\sigma_q}{N})^2}$$

$$=\sqrt{[\frac{2x(y-z)}{q^3}]^2[\frac{\sigma_x}{\frac{x^2(y-z)}{q^3}}]^2+[\frac{x^2}{q^3}]^2[\frac{\sigma_{y-z}}{\frac{x^2(y-z)}{q^3}}]^2+[\frac{-3x^2(y-z)}{q^4}]^2[\frac{\sigma_q}{\frac{x^2(y-z)}{q^3}}]^2}$$

$$=\sqrt{(2\frac{\sigma_x}{x})^2+(\frac{\sigma_{y-z}}{y-z})^2+(3\frac{\sigma_q}{q})^2}$$

$$\sigma_N=N\cdot E_N$$

其中: $$\sigma_{y-z}=\sqrt{\sigma_y^2+\sigma_z^2}$$

随机误差计算

例2 测某立方体钢材的长宽高为 ***l, b, h*** 如表，材料的密度 ***p***=7.86gcm-3，求其质量***m***。

	1	2	3	4	5	平均值
l_i (mm)	1483.7	1483.8	1483.9	1484.1	1484.0	1483.9
b_i (mm)	471.2	471.4	471.3	471.1	471.0	471.2
h_i (mm)	23.1	23.2	23.3	23.0	23.4	23.2

解：***m=plbh***

$$\bar{m} = p\bar{l}\,\bar{b}\,\bar{h}$$ =127.5030

$$\begin{cases} m = \bar{m} \pm \sigma_{\bar{m}} & (\text{单位}) \\ E = \dfrac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}} \times 100\% \end{cases}$$

$$E = \frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}} = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial l}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{l}}}{m}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{b}}}{m}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{h}}}{m}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(p\bar{b}\,\bar{h})^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\bar{l}}}{p\bar{l}\,\bar{b}\,\bar{h}}\right)^2 + (p\bar{l}\,\bar{h})^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\bar{b}}}{p\bar{l}\,\bar{b}\,\bar{h}}\right)^2 + (p\bar{b}\,\bar{l})^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\bar{h}}}{p\bar{l}\,\bar{b}\,\bar{h}}\right)^2}$$

$$\sigma_{\bar{l}}^{\,2} = \frac{\sigma_l^{\,2}}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2$$ =0.00501mm2 $= \sigma_{\bar{h}}^{\,2} = \sigma_{\bar{b}}^{\,2}$

$$\sigma_{\bar{m}} = E \cdot \bar{m}$$ =0.275157kg

$$\begin{cases} m = 127.5 \pm 0.3 & (kg) \\ E = 2.2 & (\%) \end{cases}$$

有效数字及其运算

§1.4 有效数字及 则

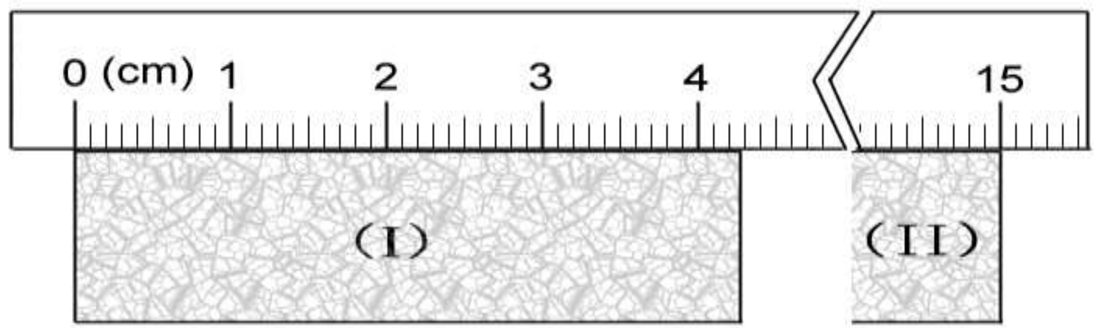
位数无限多，如1/3， π 等

位数有限，如0.333，3.14159等

数字分类：完全准确数字；有效数字。

一、 有效数字的概念

有效数字的构成(读取)：准确部分 + 一位非准确部分(误差所在位)



(I)物体长度L估读为4.27cm或4.28cm

(II)右端恰好与15cm刻度线对齐,准确数字为“15.0”，再加上估读数“0”，则物体长度L的有效数字应记为15.00cm. 估计值，一般为最小分度值的1/10的整数倍

有效数字及其运算

有效数字的基本特性(特点):

a.位数与仪器最小分度值有关，与被测量的大小也有关;

如用最小分度值0.01mm的千分尺测量的长度读数为8.344mm，用最小分度值为0.02mm的游标卡尺来测量，其读数为 8.34mm; 而测量一个大物体其读数为120.26mm 。

b.位数与小数点的位置（单位）无关;

如重力加速度9.80m / s^2，0.00980km / s^2 或 980cm / s^2, $\underline{9.80\times10^3 mm/s^2}$ 都是三位有效数字

不要写成9800 mm/s^2

c.位数粗略反映测量的误差.

位数越多，测量的相对误差就越小,

如8.344mm， 8.34mm的相对误差,

有效数字及其运算

二、有效数字的运算规则

1. 有效数字的修约：

原则：五下舍，五上入，整五凑偶

拟舍的第一位数字为5，
其后无数字或皆为0

保留末位为奇数，加1，
保留末位为偶数，不变

如保留四位有效数字：

3.14159—> 3.142

2.71729—> 2.717

4.51050—> 4.510

3.21550—> 3.216

6.378501—>6.379

7.691499—>7.691

测量误差的有效位数：修约原则------只入不舍

相对误差-----两位，如E=0.0010023修约为0.11%

绝对误差------一位，当为1或9时，可以保留两位。

如：0.00123写为0.0013，0.0962写为0.10。

有效数字及其运算

2. 有效数字运算规则:

规则: 准确数字与准确数字的运算结果仍为准确数字，准确数字与非准确数字或非准确数字与非准确数字的运算结果为非准确数字。运算结果只保留一位非准确数字。

(1)加减法—

结果的非准确位与参与运算

最大者相同

如674.6-21.3542的结果取为653.2

(2)乘除法—

结果的位数与所

数字位数最少的相同

如23.4*26的结果取为 $6.1*10^2$

(3)乘方开方—

结果的位数与相应的底数的位数相同

如 23.4^2 的结果取为548

有效数字及其运算

(4) 对数—

结果的位数与真数的位数相同

如 ln23.4的结果取为3.15

(5) 三角函数

角度误差	10 ”	1 ”	0.1 ”	0.01 ”
选择位数	5	6	7	8

如sin(16^{O}25’12”)的结果取为0.282676

以上方法对少量数据运算可用, 运算过程中可多保留位数。

对大量数据用统计方法处理.

有效数字及其运算

考虑标准差的例题：

(1)加减法—求$N=X+Y+Z$，其中$X=(98.7\pm0.3)$cm， $Y=(6.238\pm0.006)$cm，$Z=(14.36\pm0.08)$cm

解：$N=X+Y+Z=98.7+6.238+14.36=119.298$ (cm)

$$\sigma_N=\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+\sigma_Z^2}=\sqrt{0.3^2+0.006^2+0.08^2}=0.31=0.4$$

所以 $N=(119.3\pm0.4)$ (cm)

(2)乘除法—

求立方体体积V，其中$L=(22.455\pm0.002)$mm，$H=(90.35\pm0.03)$mm，$B=(279.68\pm0.05)$mm

$$V=LHB=22.455\times90.35\times279.68=567417.37104mm^3$$

$$\sigma_V=\sqrt{(BH)^2\sigma_L^2+(LH)^2\sigma_B^2+(LB)^2\sigma_H^2}$$ 219.866 mm3

所以 $V=(5674\pm3)\times10^2$ mm^3

有效数字及其运算

(3)指数— 求e^x，已知 x=7.85±0.05

$$e^x = e^{7.85} = 2.566\times10^3$$

$$d(e^x)/dx = e^x$$

$$\Delta(e^x) = e^x\cdot\Delta x = e^{7.85}\cdot0.05 = 0.13\times10^3$$

故 e^x =（2.57±0.13）×10^3

(4)三角函数--- 已知**x = 38° 24'±1'**，求**sin$x$**

sin38° 24'= 0.62114778

$$d(\sin x)/dx = \cos x$$

$$\Delta(\sin x) = \cos x\cdot\Delta x = \cos 38^\circ 24'\times\frac{\pi}{180}\times\frac{1}{60} = 0.0003$$

所以 **sin38° 24'= 0.6211** ±0.0003

有效数字及其运算

(5) 对数---- 已知$x = 65.48$，求$\ln x$

$\ln x = \ln 65.48 = 4.18174475$

$d(\ln x)/dx = 1/x \dashrightarrow \Delta(\ln x) = \Delta x/x = 0.1/65.48 = 0.002$

所以 $\ln x = 4.182 \pm 0.002$

必须指出，测量结果的**有效数字位数取决于测量**，而不取决于运算过程。因此在运算时，尤其是使用计算器时，不要随意扩大或减少有效数字位数，更不要认为算出结果的位数越多越好。

有效数字及其运算

3. 测量最终结果的有效数字：

$$\begin{cases} N = \overline{N} \pm \sigma_{\overline{N}} \quad (\text{单位}) \\ E = \dfrac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}} \times 100\% \end{cases}$$

结果的标准误差求出并修约后，测量量结果的最后位与标准误差的对齐，测量量结果按“五下舍，五上入，整五凑偶”的原则修约。

如由公式求得的杨氏模量 Y=2.18264×10^{11}(kg/m^2)，

求得标准误差为 σ_Y=0.0231864×10^{11}(kg/m^2)。

则根据上述规则，最终结果为

Y=(2.18±0.03)×10^{11}(kg/m^2)

E=1.4%

§1.5　实验数据处理的一般方法

数据处理方法

实验的数据处理不单纯是数学运算，而是要以一定的物理模型为基础，以一定的物理条件为依据，通过对数据的整理、分析和归纳计算，得出明确的实验结论。

一、　列表法----　记录数据时，把数据列成表格

要求 (1) 表格设计合理；

(2) 标题栏中写明各物理量的符号和单位；

(3) 表中所列数据要正确反映测量结果的有效数字；

(4) 实验室给出的数据或查得的单项数据应列在表格的上部

如：　r =2.50cm , h =____cm

m (g)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	…	…
5.00					
10.00					
15.00					

数据处理方法

二、图示法----将数据之间的关系或其变化情况用图线直观地表示出来

优点：物理量之间的变化规律；

内插法求值；

外推法求值。

缺点：三个及其以上的变量不适用；

绘图时易引入人为误差。

作图步骤：

(1) 选用合适的坐标纸

(2) 坐标轴的比例与标度

a. 用粗实线描出坐标轴(箭头)，横轴代表自变量，纵轴代表因变量，标明物理量名称(或符号)及单位。

数据处理方法

b. 原则上，坐标中的最小格对应测量值可靠数字的最后一位，可根据情况选择这一位的“1”、“2”或“5”倍

c. 坐标轴的起点不一定从零开始，标度用整数，不用测量值。

(3) 标实验点

a. 以“+”、“×”、“⊕”、“⊙”等符号标出实验点，测量数据落在所标符号的中心，大小适中。禁止用“ . ”

b. 一条实验曲线用同一种符号。

(4) 连图线（拟合线）

a. 把点连成直线或光滑曲线；不要无限延长

b. 要求数据点均匀地分布在图线两旁，连线要细而清晰

数据处理方法

(5) 注解说明

a. 图形的意义、数据来源、所用公式等

b. 图线的名称、实验日期、实验者等

图解法--求直线的斜率和截距 (*y=a+bx*)

在图线上测量范围内靠近两端取两相距较远的点，如$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$(不同于实验点)，用不同于实验点的符号表明

$$斜率b=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$截距a=y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$$

$$或三点法a=y_3-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_3$$

数据处理方法

图示法举例

在刚体转动实验中，当保持塔轮半径r不变的情况下，悬挂砝码质量m与下落时间t的关系为

$$m=\frac{2hI_1}{gr^2}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{M_1'}{gr}=K_1\frac{1}{t^2}+C_1$$

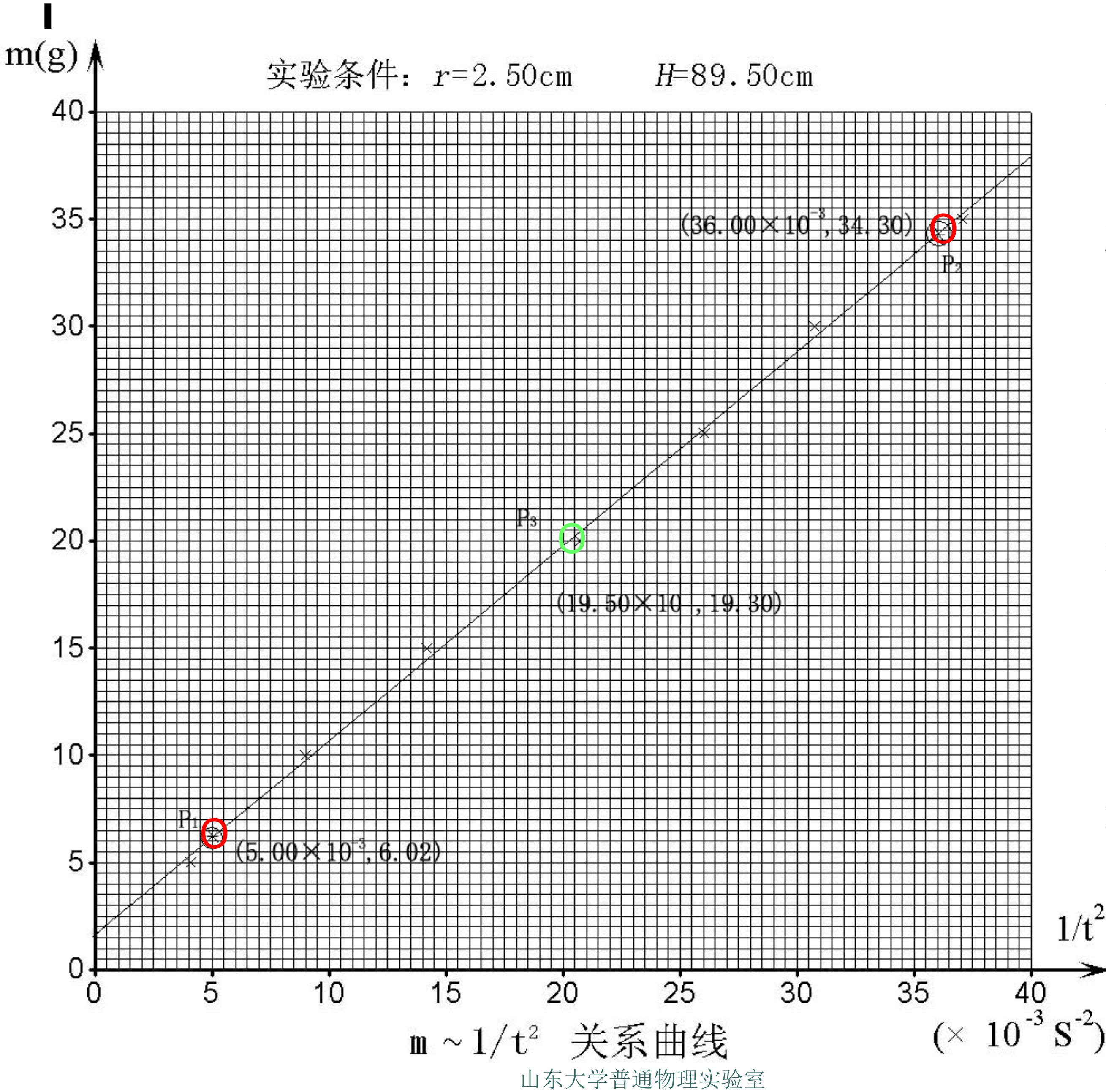
m与$1/t^2$成线性关系

测出一组$m\sim 1/t^2$值,作出它们关系曲线,求出斜率$K1$即可得到I_1

m(g)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	$\bar{t}$ (s)	$1/\bar{t}^2$ ($\times 10^{-3}$ s^{-2})
5.00	16.02	15.60	15.42	15.68	4.07
10.00	10.62	10.81	10.23	10.55	8.98
15.00	8.40	8.47	8.31	8.39	14.19
20.00	6.92	7.02	6.92	6.95	20.68
25.00	6.12	6.32	6.15	6.19	26.04
30.00	5.74	5.64	5.73	5.70	30.74
35.00	5.14	5.28	5.16	5.19	37.08

其中 r = 2.50 cm　　h = 89.50 cm

数据处理方法



作图：

选坐标纸；

坐标轴的比例与标度；

标实验点；

连图线；

注解说明

数
据
处
理
方
法

求直线的斜率和截距

在图线上测量范围内靠近两端任取两相距较远的点，如$P_1(x_1，y_1)$和$P_2(x_2，y_2)$(不同于实验点)，用不同于实验点的符号表明

P_1、P_2，坐标为

$\mathbf{P_1}（x_1, y_1）=(5.00\times10^{-3}, 6.02)$，

$\mathbf{P_2}(x_2, y_2)=(36.00\times10^{-3}, 34.30)$

$$k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{34.30-6.02}{(36.00-5.00)\times10^{-3}}=9.123\times10^2(g\cdot s^2)$$

C_1=1.65（g）

（延长与Y轴交点；由P_1、P_2的坐标值；取第三点。）

三、 逐差法 ---- 充分利用测量数据减小测量误差

数据处理方法

两个条件：

(1) 函数具有$y=a+bx$的线性关系(或代换后是线性）

(2)自变量x是等间距变化的,测量次数为偶数

如：杨氏模量,牛顿环,表面张力系数等

数据处理方法

四、线性回归（方程法）

根据实验数据用函数解析形式求出经验公式，既无人为因素影响，也更为明确和快捷，这个过程称为回归分析

a. 函数关系已经确定，但式中的系数是未知的，利用测量的n对(x_i，y_i)值，确定系数的最佳估计值。

b. 第二类问题是y和x之间的函数关系未知，需要从n对(x_i，y_i)测量数据中寻找出它们之间的函数关系式。

只讨论第一类问题中的最简单的函数关系，即一元线性方程的回归问题(或称直线拟合问题)

数据处理方法

1、一元线性回归

若已知函数的形式(最佳经验)为 $y=a+bx$

实验测得数据（x_i，y_i'），$i=1,2,\ldots,n$

由 n 对（x_i，y_i'）求a，b

对应于每一个x值，

观测值 y'和最佳经验公式的 y 值之间存在一个偏差Δy

其中 $\Delta y = y' - y = y' - (a + bx)$

使 $\sum(\Delta y_i)^2$ 最小---最小二乘法（P20-21）

数据处理方法

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy}}{\bar{x}^2 - \overline{x^2}}$$

其中：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

相关系数来判断回归分析的合理性

$$\gamma = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}}$$

$|\gamma| \to$ 1， 线性回归是合理的；

$|\gamma| \to$ 0， 不宜用线性回归.

数据处理方法

例3 用X射线检查合金铸件，透视电压*U*与铸件的厚度*x*的数据如表，求*U*—*x*的经验公式，并作相关性检验。

Xi(mm)	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	18.0	20.0	22.0	24.0	26.0
Ui(kV)	52.0	55.0	58.0	61.0	65.0	70.0	75.0	80.0	85.0	91.0

解：观察可见，表中x与U呈现比较显著的线性关系，设$U=a+bx$

(1)计算平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=18.0mm$$

$$\overline{U}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}U_i=69.2mm$$

$$\overline{xU}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_iU_i=\frac{1}{10}(x_1\cdot U_1+x_2\cdot U_2+\cdots+x_{10}\cdot U_{10})$$
$$=1303.2mm\cdot kV$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2=345mm^2$$

数据处理方法

(2) 回归系数

$$b = \frac{\overline{x} \cdot \overline{U} - \overline{xU}}{\overline{x}^2 - \overline{x^2}} \approx 2.74 kV / mm$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x} = 1.98 kV$$

(3) 相关性检验

$$\gamma = \frac{\overline{xU} - \overline{x} \cdot \overline{U}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{U^2} - \overline{U}^2)}} \approx 0.999$$

$$\overline{U^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} U_i^2 = 4947 (kV)^2$$

可见，**U**与**x**的线性相关性是很高的。

数据处理方法

2、能化为线性回归的非线性回归——曲线改直

对非线性关系变量进行变量代换，使新变量成为线性关系, 可以用线性回归、图解法、逐差法来处理。

$y=a/x$，令$z=1/x$， 则$y=az$

$Y=ae^x+b$，令$e^x=Z$， 则$y=az+b$

$y=ae^{bx}$， $\ln y=\ln a+bx$ 令$\ln y=y'$，$\ln a=a_0$， $y'=a_0+bx$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+m_0}{k}}$$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{k}m+\frac{4\pi^2}{k}m_0=am+b$$

T^2看做一个变量y，则y(即T^2)与m成线性关系

数据处理方法

- **例10** 弹簧振动周期T与悬挂砝码质量m的关系为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_0}{k}}$$

- 显然，T与m不是线性关系。但将上式两边平方，得

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2}{k}m_0 = am + b$$

- 式中，$a=4\pi2/k$，$b=4\pi2m_0/k$为常数。若把T^2看做一个变量y，则y(即T^2)与m成线性关系。

§1.6　系统误差的处理

系统误差的处理

- 系统误差通常不是明显地表现出来，但它却是影响测量结果精确度的主要因素，系统误差会给实验结果带来严重影响。而依靠多次重复测量一般是无法判断系统误差是否存在。因此，发现系统误差，并设法修正、减小或消除它的影响，是误差分析与处理的一个很重要的内容。
- 由于时间关系，本节在此课堂上不再详细介绍，希望同学们课后认真阅读此节及其他相关资料。
- 实验课中常只涉及随机误差的处理，而由于实际应用中系统误差往往是影响结果的主要因素，学生在实验课中应主动练习系统误差的处理！

第二章 常用测量器具及物理实验基本方法和技术

§ 2.1 物理实验常用测量器具

课前预习，实验前必须掌握使用方法

§ 2.2 物理实验基本方法

课前预习，实验中认真理解，课后总结

§ 2.3 物理实验基本技术

课前预习，实验中仔细操作

第二章是实验课中必用的基本仪器、实验方法与操作技术，必须在进实验室前学习、了解！否则会严重影响实验操作的进行，进而影响课程成绩！

祝同学们学习愉快！